দ্বিপদী বিস্তৃতি
Binomial Explanation

ভূমিকা

দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সে ক্ষেত্রে মান নির্ণয় করা কষ্টকর ও সময় বেশি প্রয়োজন। সাধারণভাবে ঘাত বা শক্তি n এর জন্য সূত্র প্রতিপাদন করে "প্যাসকেলের ত্রিভুজ" পদ্ধতি ব্যবহার করে খুব সহজেই অঋণাত্মক পূর্ণস্যাংখিক ঘাতের দ্বিপদী রাশির মান নির্ণয় করা সম্ভব। দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয়ের একটি কৌশল "*Blaise Pascal*" প্রথম ব্যবহার করেন। তাই তার নাম অনুসারে পদ্ধতিটির নাম প্যাসকেলের ত্রিভুজ (*Pascal's Triangle*) বলা হয়। দ্বিপদী রাশির ঘাত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হতে পারে। কিন্তু এ ইউনিটে "প্যাসকেলের ত্রিভুজ" ব্যবহার করে বিস্তৃতি যার ঘাত/শক্তি শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সীমাবদ্ধ থাকবে, $n!$ ও ${}^nC_r$ এর মান নির্ণয় করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন।
- প্যাসকেলের ত্রিভুজ বর্ণনা করতে পারবেন।
- সমস্যা সমাধানে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করতে পারবেন।
- $n!$ এবং ${}^nc_r$ এর মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৭.১: দ্বিপদী $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি ও প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার

পাঠ ৭.২: দ্বিপদী $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতি ও $n!$ ও ${}^nc_r$ এর মান নির্ণয়

পাঠ ৭.১ দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি ও প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন,
- প্যাসকেলের ত্রিভুজ বর্ণনা করতে পারবেন,
- প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে দ্বিপদী বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	দ্বিপদী বিস্তৃতি, প্যাসকেলের ত্রিভুজ

মূলপাঠ

দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি

দুইটি পদ দ্বারা গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী (Binomial) রাশি বলা হয়। কয়েকটি দ্বিপদী রাশির উদাহরণ $(a+x)$, $(a-b)$, $(x+y)$, $(1-y)$, x^2-y^2 ইত্যাদি।

মনে করুন, $(1+x)$ একটি দ্বিপদী রাশি। এখন $(1+x)$ কে যদি $(1+x)$ দ্বারা বার বার গুণ করা হয় তাহলে,

$(1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4, (1+x)^5, \ldots\ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি

আমরা জানি, $(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1 + 2x + x^2(1+ x)3$

$= (1+2x+x2)(1+x) = (1 + 2x + x^2 + x + 2x^2 + x^3) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

একই পদ্ধিতিতে $(1+x)^4, (1+x)^5, (1+x)^6$ .... ইত্যাদি গুণফল নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু $(1+x)$ এর ঘাত বা শক্তি যত বাড়বে গুণফল তত বড় ও সময় তত বেশি লাগবে। মনে করুন, $(1+x)$ দ্বিপদী রাশির ঘাত বা শক্তি n এর জন্য $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে হবে। যেখানে, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .... অর্থাৎ অঋণাত্মক মানের জন্য সীমাবদ্ধ। এখন,

n এর মান	দ্বিপদী রাশির বিস্তার	পদসংখ্যা
$n = 0, (1+x)^0 =$	1	1
$n = 1, (1+x)^1 =$	$1 + x$	2
$n = 2, (1+x)^2 =$	$1 + 2x + x^2$	3
$n = 3, (1+x)^3 =$	$1 + 3x + 3x^2 + x^3$	4
$n = 4, (1+x)^4 =$	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$	5
$n = 5, (1+x)^5 =$	$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$	6
$n = 6, (1+x)^6 =$	$1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$	7

উপরের বিস্তৃতির আলোকে লিখতে পারা যায়–

1. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে।
2. x এর ঘাত 0 শূন্য থেকে শুরু হয়ে $1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পেয়েছে।

দ্বিপদী সহগ: উপরে বর্ণিত প্রত্যেকটি দ্বিপদী বিস্তৃতিতে x এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ (co-efficient) কে দ্বিপদী সহগ বলা হয়। 1 কে x এর সহগ বিবেচনা করতে হবে। উপরের বিস্তৃতির সহগগুলোকে সাজালে পাওয়া যাবে,

$n = 0$ 1
$n = 1$ 1 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4$ 1 4 6 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1
$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1

দেখা যাচ্ছে সহগগুলো একটি ত্রিভুজের আকার ধারন করেছে। এই ত্রিভুজকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (*Pascal's Triangle*) বলা হয়। অতএব, প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে আমরা সহজেই দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে সহগগুলো নির্ণয় করতে পারি।

প্যাসকেল ত্রিভুজের ব্যবহার

প্যাসকেল ত্রিভুজ থেকে দেখো যাচ্ছে যে এর বাস ও ডান দিকে "1" আছে। ত্রিভুজের ঠিক উপরেক দুইটি সংখ্যার যোগফল মাঝের সংখ্যা গুলো নির্দেশন করে। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্য করুন–

$n = 6$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলো–

1 6 15 20 15 6 1

$n = 7$ এর জন্য সহগগুলো হবে–

n = 6 1 6 15 20 15 6 1

n =7 1 7 21 35 35 21 7 1

$\therefore (1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

এবং $(1 + x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$

আপনারা লক্ষ্য করছেন যে, এই পদ্ধতিতে একটি বিশেষ সমস্য রয়েছে। যদি $(1+x)^6$ এর বিস্তৃতি জানতে চাইলে $(1+x)^5$ এর বিস্তৃতি জানা প্রয়োজন। আবার যে কোনো দ্বিপদী সহগ জানার জন্য তার ঠিক উপরের পূর্ববর্তী দুইটি সহগ জানা প্রয়োজন।

এই সমস্যা থেকে উত্তোরনের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে ঘাত 'n' এবং পদের অবস্থান 'r' ধরে নতুন একটি সাংকেতিক চিহ্ন $\binom{n}{r}$ বিবেচনা করেন।

উদাহরণ হিসেবে যদি $n = 5$ হয় তাহলে পদসংখ্য হবে $5 + 1 = 6$ টি।

মনে করুন, পদ ছয়টি যথাক্রমে, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 এবং T_6

যখন $n = 5$ পদসংখ্যা 6টি : $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$.

তাদের সহগগুলো হলোঃ 1 5 10 10 5 1

নতুন চিহ্ন ব্যবহার করে সহগ ঃ $\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$

এখানে, $\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5, \binom{5}{2} = \frac{5\times4}{1\times2} = 10$

$$\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{1\times2\times3} = 10, \binom{5}{4} = \frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4} = 5 \quad \binom{5}{5} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5} = 1$$

উল্লেখিত নতুন চিহ্নের সাহায্যে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ($n = 1, 2, 3, ...$) এর জন্য হবে:

$n = 1$ $\quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

$n = 2$ $\quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

$n = 3$ $\quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

$n = 4$ $\quad \binom{4}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

$n = 5$ $\quad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$

$n = 6$ $\quad \binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$

উপরের ত্রিভুজ থেকে $(1+x)^5$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ T_{3+1} পদের সহগ $\binom{5}{3}$

$(1+x)^6$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় T_{2+1} পদের সহগ $\binom{6}{2}$

সাধারণভাবে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির r তম পদের সহগ $T_{r+1} = \binom{n}{r}$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের দুইটি হেলানো পার্শ্ব থেকে পাওয়া যাবে,

$$\binom{1}{0}=1,\quad \binom{2}{0}=1,\quad \binom{3}{0}=1,\quad \binom{4}{0}=1,\quad \binom{5}{0}=1,\quad \binom{6}{0}=1 \ldots \binom{n}{0}=1$$

$$\binom{1}{1}=1,\quad \binom{2}{2}=1,\quad \binom{3}{3}=1,\quad \binom{4}{4}=1,\quad \binom{5}{5}=1,\quad \binom{n}{n}=1$$

আবার, $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{1\times 2}=\frac{4(4-1)}{1\times 2}$, $\binom{5}{3}=\frac{5\times(5-1)(5-2)}{1\times 2\times 3}=1$

$$\binom{6}{4}=\frac{6\times(6-5)\times(6-2)(6-3)}{1\times 2\times 3\times 4}$$

সাধারণভাবে লিখা যায়, $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\ .....\ (n-r+1)}{1\times 2\times 3\times ....\times r}$

উপরের চিহ্ন ব্যবহার করে পাই,

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}x^o+\binom{5}{1}x^1+\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+\binom{5}{5}x^5$$

$$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

$$(1+x)^6=\binom{6}{0}x^o+\binom{6}{1}x^1+\binom{6}{2}x^2+\binom{6}{3}x^3\binom{6}{4}x^4+\binom{6}{5}x^5+\binom{6}{6}x^6$$

$$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

সাধারণভাবে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি,

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}x^o+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+......+\binom{n}{n}x^n.$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)^3}{1.2.3}...+1.x^n$$

$\therefore$ দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি–

$$(1+x)^n=1+\frac{n.x}{1}+\frac{n(n-1)x^2}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.2.3}+...+x^n.$$

উদাহরণ 1: $(1-2x)^4$ কে বিস্তৃত করুন।

সমাধান: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$(1-2x)^4 = 1+4.(-2x) + 6(-2x)^2 + 4(-2x)^3 + (-2x)^4$$
$$= 1 - 2x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$(1-2x)^4 = \binom{4}{0}(-2x)^0 + \binom{4}{1}(-2x)^1 + \binom{4}{2}(-2x)^2 + \binom{4}{3}(-2x)^3 + \binom{4}{4}(-2x)^4$$

$$= 1 + \frac{4}{1}(-2x) + \frac{4.3}{1.2}(-2x)^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}(-2x)^3 + \frac{4.3.2.1(-2x)}{1.2.3.4(-2x)}$$

$$= 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$$

শিক্ষার্থীর কাজ	$(1+x)^7$ প্যাসকেল ত্রিভুজের ব্যবহার করে বিস্তৃতি নির্ণয় করুন। $(1-x)^9$ প্যাসকেল ত্রিভুজের ব্যবহার করে বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 2: $\left(1-\frac{1}{\text{x}}\right)^5$ কে ৬ষ্ঠ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করুন।

সমাধান: প্যাসকেল ত্রিভুজ ব্যবহার করে –

$n = 1$ 1 1

$n = 2$ 1 2 1

$n = 3$ 1 3 3 1

$n = 4$ 1 4 6 4 1

$n = 5$ 1 5 10 10 5 1

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^5 = 1 + 5.\left(-\frac{1}{x}\right) + 10\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 10\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \left(-\frac{1}{x}\right)^5 ...$$

$$= 1 - \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2} - \frac{10}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^5} + ...$$

$$\therefore \left(1-\frac{1}{x}\right)^5 = 1 - 5.\frac{1}{x} + 10.\frac{1}{x^2} - 10.\frac{1}{x^3} + 5.\frac{1}{x^4} - 1.\frac{1}{x^5} + ...$$ (৬ষ্ঠ পদ পর্যন্ত)

উদাহরণ 3: $(1-2x)^6\,(1+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $(1-2x)^6\,(1+2x)^5 = (1-2x)\,(1-2x)^5\,(1+2x)^5$

$= (1-2x)\,\{(1-2x)(1+2x)\}^5 = (1-2x)\,(1-4x^2)^5$

$$= (1-2x)\left\{1 + \binom{5}{1}(-4x^2) + \binom{5}{2}(-4x^2)^2 + \binom{5}{3}(-4x^2)^3 + \binom{5}{4}(-4x^2)^4 + \binom{5}{5}(-4x^2)^5\right\}$$

$= (1-2x)\,\{1 - 20x^2 + 160x^4 - 640x^6 + 1280x^8\}$

$= 1 - 20x^2 + 160x^4 - 640x^6 + 1280x^8 - 2x + 40x^3 - 320x^5 + 1280\,x^7 ...$

$= 1 - 2x - 20x^2 + 40x^3 + 160x^4 - 320x^5 - 640x^6 + ...$

$\therefore (1-2x)^6\,(1+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগঃ -320.

$\therefore x^5$ এর সহগ -320।

উদাহরণ 4: $\left(1-\frac{ay^3}{2}\right)^5$ এর বিস্তৃতি করলে যদি y^6 এর সহগ 125 পাওয়া যায়। তাহলে a এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $$\left(1-\frac{ay^3}{2}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^0 + \binom{5}{1}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^1 + \binom{5}{2}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^3$$

$$= 1 - \frac{5\times(+a)y^3}{2} + \frac{5\times4}{2\times2}\,a^2y^6 ... = 1 - \frac{5}{2}ay^3 + 5a^2y^6 ...$$

প্রশ্নমতে, $5a^2 = 125$

বা, $a^2 = 25$

$\therefore \quad a = \pm 5$

উদাহরণ 5: y এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1-\frac{y}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় করুন। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(0.667)^6$ এর মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\left(1-\frac{y}{3}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(\frac{-y}{3}\right)^0 + \binom{6}{1}\left(\frac{-y}{3}\right)^1 + \binom{6}{2}\left(\frac{-y}{3}\right)^2 + \ldots$

$= 1 - 2y + \frac{6\times 5}{1\times 2\times 3\times 3}\, y^2 - \ldots. \quad = (0.33333)^6$

সারসংক্ষেপ

দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি

- $\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{r}x^r + \ldots x^n.$
- $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যাক পদ রয়েছে
- x এর ঘাত 0 থেকে শুরু করে 1, 2, 3, ... n পর্যন্ত বৃদ্ধি পেয়েছে
- প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির সহগগুলো নির্ণয় করা যায়

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১

1. $(1-2x)^6$ এর প্যারকেল ত্রিভুজ ব্যবহার করে বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।
2. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1-\frac{2x}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় করুন
3. $(1+y)^6\,(1-2y)^5$ এর বিস্তৃতিতে y^5 এর সহগ নির্ণয় করুন।
4. $(1-3x)^6$ প্যাসকেল ত্রিভুজের ব্যবহার করে বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

পাঠ ৭.২ দ্বিপদী $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি এবং $n!$ ও ${}^nc_r$ এর মান নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করতে পারবেন,
- $n!$ এর মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- ${}^nc_r$ এর মান নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বিস্তৃতি, দ্বিপদী,

মূলপাঠ

দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি ঃ

আপনারা জানেন, $(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots\binom{n}{r}x^r+\ldots\binom{n}{n}x^n$

এখন উপরের বিস্তৃতির আলোকে বিস্তৃতির সাধারণ আকার $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি জানবেন, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি সাধারণভাবে দ্বিপদী উপপাদ্য নামে পরিচিত।

এখন, $(a+x)^n = \left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n\Big\} = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$

$$\therefore\ (a+x)^n = a^n\left[1+\binom{n}{1}\left(\frac{x}{a}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\ldots\ldots+\binom{n}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right]$$

অতএব, উপরের দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতির আলোকে–

i. দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে।
ii. বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে a এবং x এর ঘাতের সমষ্টি সমান।
iii. বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হতে সমদূরবর্তী পদগুলির সহগ পরস্পর সমান।

শিক্ষার্থীর কাজ	$\left(y-\frac{1}{y^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে y মুক্ত পদটি নির্ণয় করুন।

***n*! এর মান নির্ণয়ঃ**

আপনারা জানেন, 2 = 2.1;   6 = 3.2.1;   24 = 4.3.2.1;   120 = 5.4.3.2.1

এখন ডানদিকের মানসমূহকে একটি সাংকেতিক চিহ্ন ফ্যাক্টোরিয়াল (Factorial) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়,

2 = 2.1 = 2!
6 = 3.2.1 = 3!
24 = 4.3.2.1 = 4!
120 = 5.4.3.2.1 = 5!

আবার, 4!= 4. (4–1) (4–2) (4–3)
5! = 5 (5–1) (5–2) (5–3) (5–4)

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ....\ 3.2.1,$ $n!$ কে পড়া হয় ফ্যাক্টোরিয়াল n

^nc_r এর মান নির্ণয়

আমরা জানি, $\binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = \frac{6.5.4.3.2.1}{(1.2.3.4)(2.1)} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!}$

$\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{(1.2.3)(4.3.2.1)} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!}$

সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

এখন, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = {}^nc_r$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

তদ্রুপ $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = {}^6c_4$, $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = {}^7c_r$

সুতরাং $\binom{n}{r}$ এবং ^nc_r এর মান একই।

$\therefore \binom{n}{1} = {}^nc_1 \; \binom{n}{2} = {}^nc_2 \; \binom{n}{3} = {}^nc_3 , \binom{n}{n} = {}^nc_n$

আপনারা জানেন, $\binom{n}{n} = 1 = {}^nc_n$

$$1 = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$\therefore 0! = 1$$

এখন $(1+x)^n$ দ্বিপদী বিস্তৃতিতে $\binom{n}{r} = {}^nc_r$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় –

$$(1+x)^n = 1 + {}^nc_1x + {}^nc_2x^2 + {}^nc_3x^3 + \ldots + {}^nc_rx^r + \ldots + x^n$$

এবং $(a+x)^n$ দ্বিপদী উপপাদ্যে $\binom{n}{r}$ এর মান ${}^nc_r$ দ্বারা নিম্নলিখিত ভাবে লিখতে পারি–

$$(a+x)^n = a^n + {}^nc_1a^{n-1}x + {}^nc_2a^{n-2}x^2 + {}^nc_3a^{n-3}x^3 + \ldots + {}^nc_ra^{n-r}x^r + \ldots + x^n$$

$${}^nc_n = {}^nc_{n-r}$$

আমরা জানি, ${}^5c_2 \dfrac{(5)!}{(2)!(5-2)!} = \dfrac{5.4.3.2.1}{(1.2)\ (3.2.1)} = 10$

$${}^5c_{5-2} = {}^5c_3 = \frac{(5)!}{3!(5-2)!} = \frac{5.4.3.2.1}{(1.2.3)\ (1.2)} = 10$$

সুতরাং সাধারণ ভাবে, ${}^nc_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

এবং ${}^nc_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \dfrac{n!}{(n-r!)\,r!}$

অতএব, ${}^nc_r = {}^nc_{n-r}$

$\therefore$ ${}^nc_r$ এবং ${}^nc_{n-r}$ সমাবেশ দুইটিকে পরস্পর সম্পূরক সমাবেশ বলা হয়।

উদাহরণ 1: $\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন ও x বর্জিত পদের সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)^6$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)^6 + {}^6c_1\left(\frac{1}{x^2}\right)^5(-x) + {}^6c_2\left(\frac{1}{x^2}\right)^4(-x)^2 + {}^6c_3\left(\frac{1}{x^2}\right)^3(-x)^3 + {}^6c_4\left(\frac{1}{x^2}\right)^2(-x)^4 + {}^6c_5\left(\frac{1}{x^2}\right)(-x)^5 + (-x)^6.$$

$$= \frac{1}{x^{12}} + 6\frac{1}{x^{10}}.(-x) + \frac{6!}{2!(6-2)!} + \frac{1}{x^8}x^2 - \frac{6!}{3!(6-3)!}.\frac{1}{x^6}.x^3 + \frac{6!}{4!(6-4)!}\frac{1}{x^4}.x^4 - \frac{6!}{6!(6-5)!}\frac{x^5}{x^2} + x^6$$

$$= \frac{1}{x^{12}} - 6.\frac{1}{x^9} + 15.\frac{1}{x^6} - 20.\frac{1}{x^3} + 15 - 6.x^3 + x^6.$$

$\therefore \left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)^6$ এর বিস্তৃতি $\dfrac{1}{x^{12}} - 6.\dfrac{1}{x^9} + 15.\dfrac{1}{x^6} - 20.\dfrac{1}{x^3} + 15 - 6.x^3 + x6.$ এবং x বর্জিত পদের সহগ 15।

উদাহরণ 2: $\left(3x - \dfrac{1}{x}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^4$ এর বিস্তৃতি $=(3x)^4+{}^4c_1(3x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)+{}^4c_2(3x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^2+{}^4c_3(3x)\left(-\frac{1}{x}\right)^3+{}^4c_4\left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$$=81x^4-108x^2+54-12\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

$\therefore$ মধ্যপদ x বর্জিত পদ 54।

উদাহরণ 3: যদি ${}^nc_5={}^nc_7$ হয়, তবে ${}^nc_8$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, ${}^nc_5={}^nc_7$

বা, ${}^nc_{n-5}={}^nc_7$ $\left[\because {}^nc_r={}^nc_r\right]$

$\therefore n-5=7$

$\therefore n=7+5=12$

এখন, ${}^nc_8={}^{12}c_8=\frac{(12)!}{8!(12-8)!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8!}{8!\ 4!}=\frac{12\times11\times10\times9}{4.3.2.1}=495$

$\therefore$ নির্ণেয় মান ${}^{12}c_8=495$

সারসংক্ষেপ

- $(a+x)^n$ বিস্তৃতিকে দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি বলা হয়
- দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকে
- $n!=n(n-1)(n-2)\ ...\ 3.2.1$
- ${}^nc_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- $n_{c_r}=n_{c_{n-r}}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

1. $\binom{7}{5}$ এর মান কোনটি?

   (ক) 35 (খ) 21 (গ) 7 (ঘ) 5

দ্বিপদী $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতির আলোকে (2–4) নং প্রশ্নের উত্তর দিন।

2. বিস্তৃতিটির তৃতীয় ধাপ পর্যন্ত বিস্তার কোনটি?

   (ক) $1+4y+6y^2+y^3$ (খ) $1+3y+3y^2+y^3$
   (গ) $1+5y+10y^2+y^3$ (ঘ) $1+4y+10y^2+y^3$

3. বিস্তৃতিটির সহগগুলো কোনটি?

   (ক) 1, 5, 10, 10, 5, 1 (খ) 5, 1, 10, 5, 10, 1
   (গ) 1, 5, 5, 10, 10, 1 (ঘ) 1, 5, 10, 1, 5, 10

4. বিস্তৃতি কোনটি?

   (ক) $1+5y+5y^2+10y^3+10y^4+y^5$ (খ) $1+5y+10y^2+y^3+5y^4+10y^5$
   (গ) $1+5y+10y^2+5y^3+10y^4+y^5$ (ঘ) $1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$

5. $(1+3x)^4$ দ্বিপদী বিস্তৃতির x^3 এর সহগ কত?

   (ক) 54 (খ) 64 (গ) 108 (ঘ) 81

6. (i) ${}^7C_5 = {}^7c_{7-5} = {}^7c_2$

(ii) $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তৃতীয় পদটি $a^{n-2}.\ {}^nc_2.x^2$ ।

(iii) $n! = (n-1)(n-2)$ ... ... 3.2.1.

উপরের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

7. $n = r = 90$ হলে ${}^nc_r$ এর মান কোনটি?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 90 (ঘ) 900

8. ${}^nc_0 =$ কত?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) n (ঘ) 10

9. $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যক পদ আছে। এখানে একটি

(ক) অঋণাত্মক সংখ্যা (খ) ঋণাত্মক সংখ্যা ধনাত্মক সংখ্যা

(গ) ভগ্নাংশ সংখ্যা (ঘ) ধনাত্মক সংখ্যা

10. 120= কত?

(ক) 4! (খ) 6! (গ) 5! (ঘ) 7!

11. $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$ হলে –

(ক) উক্ত রাশিটিতে কতটি মধ্যপদ থাকবে এবং কেন?

(খ) $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

(গ) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি থেকে তম $(r+1)$ পদ নির্ণয় করুন এবং $r=2$ এবং $x = 3$ বসিয়ে মান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

1. খ 2. খ 3. ক 4. ঘ 5. গ 6. খ 7. খ 8. খ) ক 9. ঘ 10. গ